量子力学A演習　解答例（演習3）

演習3

(1) (3-5)式 $< B\,|\,A > = < A\,|\,B >^*$ 　を示せ。

解答例 $|\,A > \to \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$、$< A\,| \to \left(\alpha_1^* \alpha_2^* \ldots \alpha_N^*\right)$、$|\,B > \to \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}$、$< B\,| \to \left(\beta_1^* \beta_2^* \ldots \beta_N^*\right)$ とおくと、

$$< B\,|\,A > = \left(\beta_1^* \beta_2^* \ldots \beta_N^*\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \beta_1^* \alpha_1 + \beta_2^* \alpha_2 + \ldots + \beta_N^* \alpha_N = (\alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \ldots + \alpha_N^* \beta_N)^* = < A\,|\,B >^*$$

(2) (3-14)で定義される射影演算子 $\hat{\Lambda}_i \equiv |\,i > < i\,|$ は任意ベクトル（例えば$|\,A >$）に作用しどのような効果をもたらすと考えられるかを述べよ。それを使って、(3-13)式、$\sum_{i=1}^{N} |\,i > < i\,| = \hat{I}$ （恒等演算子）の意味を考えよ。（hint: 通常のベクトル空間において幾何学的に考えてみよ）

解答例

$\hat{\Lambda}_i \equiv |\,i > < i\,|$を$|\,A >$に作用させると、$\hat{\Lambda}_i |\,A > = |\,i > < i\,|\,A >$.

$< i\,|\,A >$は　$|\,A > = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |\,i >$とした時の成分 α_i を表すので、$\hat{\Lambda}_i |\,A > = \alpha_i |\,i >$となる。

従って、射影演算子 $\hat{\Lambda}_i$を$|\,A >$に作用させるということは、基底$|\,i >$の方向を向き、「$|\,A >$の$|\,i >$方向への射影成分（内積）」を長さとするベクトルを作り出す、ということである。

次に、$\sum_{i=1}^{N} \hat{\Lambda}_i = \sum_{i=1}^{N} |\,i > < i\,|$を$|\,A >$に作用させると

$\sum_{i=1}^{N} \hat{\Lambda}_i |\,A > = \sum_{i=1}^{N} |\,i > < i\,|\,A > = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |\,i >$となる。これは、それぞれの基底方向を向き、それぞれの基底への射影成分を持ったベクトルの総和であるから、合成されて元の$|\,A >$に戻る、というように解釈できる。

(3) 状態ベクトルが規格化されている場合、全確率が１になるという(3-21)式
$P = P_u + P_d = |\,\alpha_u|^2 + |\,\alpha_d|^2 = 1$　が成り立つことを示せ。
（hint: (3-16)式の$|\,A >$とそのブラバージョンを$< A\,|\,A >$に代入してみるか、(3-19)(3-20)に代入して上の恒等演算子を使う）

解答例

$< A\,|\,A >$を計算してみれば良い。$|\,A > = \alpha_u |\,u > + \alpha_d |\,d >$と$< A\,| = < u\,|\,\alpha_u^* + < d\,|\,\alpha_d^*$を代入して展開すると、

$< A\,|\,A > = (\alpha_u^* < u\,| + \alpha_d^* < d\,|)(\alpha_u |\,u > + \alpha_d |\,d >) = \alpha_u^* \alpha_u + \alpha_d \alpha_d^* = |\,\alpha_u|^2 + |\,\alpha_d|^2$

となるが、これは、$|\,A >$の長さの２乗が全確率になっていることを示している。

$|\,A >$が規格化されていれば、$< A\,|\,A > = 1$となるので、$P = |\,\alpha_u|^2 + |\,\alpha_d|^2 = 1$が示せた。

（別解）

(3-19)(3-20)式から $P_u = <A|u><u|A>$、$P_d = <A|d><d|A>$ となるので、全確率Pは、

$P = P_u + P_d = <A|u><u|A> + <A|d><d|A> = <A|(|u><u| + |d><d|)|A>$

と書ける。$|u><u| + |d><d|$ はスピンの状態を表す２次元複素ベクトル空間での射影演算子の全ての和であるから、(3-14)より恒等演算子に等しい（i=1, 2をu, dとしたと考えれば良い）。

従って、$P = <A|(|u><u| + |d><d|)|A> = <A|\hat{I}|A> = <A|A>$ と書ける。

この場合も、$|A>$ が規格化されていれば、 $<A|A> = 1$となるので、全確率が１であることを示せた。

(4) (3-29)式 $|l> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> - \dfrac{1}{\sqrt{2}}|d>$ が (3-26)式 $|r> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|d>$ と直交していることを示せ。

解答例 $<l|r> = 0$ を示せば良い。

$<l|r> = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}<u| - \dfrac{1}{\sqrt{2}}<d|)(\dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> + \dfrac{1}{\sqrt{2}}|d>)$. これを展開して、 $<u|d> = <d|u> = 0$、

$<u|u> = <d|d> = 1$ を使えば、 $<l|r> = 1/2 - 1/2 = 0$ となり直交していることを示せた。

(5) $|r>$ と $|l>$ は $|u>$ と $|d>$ を基底とする複素ベクトル空間において、どのような成分を持つ列ベクトルかを書け。**解答** $|r> \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $|l> \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

(6) (3-31)式 $|l> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|d>$ が(3-30)式$|r> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> + \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|d>$ と直交していることを示せ。

解答例 (4)と同様にして、 $<l|r> = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}<u| - \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\delta_1}<d|)(\dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> + \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|d>) = 1/2 - 1/2 = 0$ となる。

(7) (3-32)式 $|i> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> + \dfrac{i}{\sqrt{2}}|d>$ と(3-33)式 $|o> = \dfrac{1}{\sqrt{2}}|u> - \dfrac{i}{\sqrt{2}}|d>$ を求めるのに必要な条件を全て書き出せ。

解答例 $|i>$ と $|o>$ は排他的と考えられるから、互いに直交しているだろう。すなわち、

1) $<i|o> = 0$

次に、$|i>$ か $|o>$ の入射実験でσ_zを測定すれ場合、 $\alpha_u^*\alpha_u = 1/2$、$\alpha_d^*\alpha_d = 1/2$ であるから、

(3-19)(3-20)の $|A>$ を $|i>$ 、$|o>$ に置き換えて、それぞれ、

2) $<i|u><u|i> = 1/2$

3) $<i|d><d|i> = 1/2$

4) $<o|u><u|o> = 1/2$

5) $<o|d><d|o> = 1/2$

が得られる。

さらに、$|i>$ か $|o>$ の入射実験で「σ_x」を測定したとすれば、$\alpha_r^*\alpha_r = 1/2$、 $\alpha_l^*\alpha_l = 1/2$ となる。

従って、(3-19)(3-20)の $|A>$ を $|i>$ 、$|o>$ 、さらに $|u>$ 、$|d>$ を $|r>$ 、$|l>$ に置き換えて、

6) $<i|r><r|i> = 1/2$

7) $<i|l><l|i> = 1/2$

8) $<o|r><r|o> = 1/2$

9) $<o|l><l|o> = 1/2$

が成り立つ。結局、求める条件は１）〜９）である。

(8) (3-32)式、(3-33)式が、(6)で求めた条件を全て満たしていることを確かめなさい。

解答例

1) $<i|o>=0$ を示す。

$$<i|o>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=1/2-1/2=0$$

2) $<i|u><u|i>=1/2$ を示す。

$$<i|u><u|i>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)|u><u|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

3) $<i|d><d|i>=1/2$ を示す。

$$<i|d><d|i>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)|d><d|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

4) $<o|u><u|o>=1/2$ を示す。

$$<o|u><u|o>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)|u><u|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

5) $<o|d><d|o>=1/2$を示す。

$$<o|d><d|o>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)|d><d|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

6) $<i|r><r|i>=1/2$ を示す。

$$<i|r><r|i>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{1}{\sqrt{2}}|d>\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{1}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

7) $<i|l><l|i>=1/2$ を示す。

$$<i|l><l|i>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{1}{\sqrt{2}}|d>\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{1}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

8) $<o|r><r|o>=1/2$ を示す。

$$<o|r><r|o>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{1}{\sqrt{2}}|d>\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{1}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

9) $<o|l><l|o>=1/2$ を示す。

$$<o|l><l|o>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|+\frac{i}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{1}{\sqrt{2}}|d>\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<u|-\frac{1}{\sqrt{2}}<d|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{i}{\sqrt{2}}|d>\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

(9) (3-26)式と(3-29)式より　$|u>$および$|d>$を$|r>$と$|l>$で表しなさい。この結果（特に$|u>$）の結果は、3-1-2節の実験４で$\sigma_z=+1$ （$|u>$の状態）の時にσ_xをSG2で観測した結果を説明することを示せ。

(解答例)

$|r>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>+\frac{1}{\sqrt{2}}|d>$, $|l>=\frac{1}{\sqrt{2}}|u>-\frac{1}{\sqrt{2}}|d>$より、$|r>+|l>=\frac{2}{\sqrt{2}}|u>$,　$|r>-|l>=\frac{2}{\sqrt{2}}|d>$

であるから、結局、

$$|u>=\frac{1}{\sqrt{2}}|r>+\frac{1}{\sqrt{2}}|l>\cdots\ (*)$$

$$|d>=\frac{1}{\sqrt{2}}|r>-\frac{1}{\sqrt{2}}|l>$$　が得られる。

（＊）の式は$|r>$と$|l>$を基底として選んだ時の$|u>$を表すになっている。実際、$|u>$の状態の時にσ_xを観測すると、$\sigma_x=+1$ が観測される確率が ,$P_r=\alpha_r^*\alpha_r=(1\sqrt{2})(1/\sqrt{2})=1/2,\ \ P_l=\alpha_l^*\alpha_l=(1\sqrt{2})(1/\sqrt{2})=1/2$ となる事を示しており、実験の結果と矛盾しない。

(8) zx平面でz軸からx軸方向へθ 傾いた方向を向くスピン状態があったとする（これを$|\theta>$とする）。これを σ_z を観測するSGに入射すると、$\sigma_z = \pm 1$ が観測された。それぞれの確率は、$\cos^2\dfrac{\theta}{2}$、および$\sin^2\dfrac{\theta}{2}$であった。

(i) 古典的なスピンの場合、σ_zの観測値はいくらになるか。

(ii) $\sigma_z = \pm 1$の観測される全確率を求めよ。

(iii) $|\theta>$は　　$|u>, |d>$を基底として

$$|\theta> = \cos\frac{\theta}{2}|u> + \sin\frac{\theta}{2}|d> \qquad (*)$$

と表されると仮定しよう。この時、$|\theta>$ の状態でのσ_zの観測による期待値 $<\sigma_z>$を求め、古典スピンの実験結果(i)と比較せよ。

（解答例）

i) σ_zはz軸からx軸方向へθ 傾いた長さ１のベクトルのz軸への射影であるから、観測値は $\cos\theta$.

ii) 全確率 $P = \cos^2\dfrac{\theta}{2} + \sin^2\dfrac{\theta}{2} = 1$

iii) $<\sigma_z> = |\alpha_u|^2 \times (+1) + |\alpha_d|^2 \times (-1) = \cos^2\dfrac{\theta}{2} \times (+1) + \sin^2\dfrac{\theta}{2} \times (-1) = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2} = \cos\theta$

期待値 $\cos\theta$ は古典的なスピンの場合の観測値 $\cos\theta$ に対応している。